Colle semaine 9 (du 5 au 10 décembre 2022) - MP

Séries entières

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *étudier la convergence d'une série entière et les propriétés de sa somme ;*
- *introduire la notion de fonction développable en série entière ;*
- *établir les développements en série entière des fonctions usuelles.*

Les coefficients des séries entières considérées sont réels ou complexes.

- Lemme d'Abel : si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée alors, pour tout nombre complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente. Rayon de convergence d'une série entière, défini comme borne supérieure dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des réels positifs r tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. Disque ouvert de convergence. Intervalle ouvert de convergence. La série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et elle diverge grossièrement si $|z| > R$.
- Si $a_n = O(b_n)$ et donc en particulier si $a_n = o(b_n)$, $R_a \geqslant R_b$. Si $a_n \sim b_n$, $R_a = R_b$.
- Application de la règle de d'Alembert pour les séries numériques au calcul du rayon. La limite du rapport $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ peut être utilisée directement. Rayon de convergence de $\sum n^\alpha z^n$.
- Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.
- Convergence normale d'une série entière sur tout disque fermé de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence. Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.
- Théorème d'Abel radial : si $\sum a_n t^n$ a pour rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \underset{t \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$. La démonstration est hors programme.
- Relation $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum n a_n z^n\right)$. La somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.
- Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Si les fonctions $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ et $t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$ coïncident sur un intervalle $[0, \alpha]$ avec $\alpha > 0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.
- Fonction développable en série entière sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, sur l'intervalle $]-R, R[$. Dans le cas réel, lien avec la série de Taylor.
- Développement de $\exp(z)$ sur $\mathbb{C}$. Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.
- Développements usuels dans le domaine réel. Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, $t \mapsto \ln(1+t)$ et $t \mapsto (1+t)^\alpha$.
- Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

Remarques

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :
  i) Lemme d'Abel.
  ii) Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$ et présenter un cas d'égalité et un cas d'inégalité stricte.
  iii) Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
  iv) Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon $R > 0$. On pose :
  $$\forall t \in \left]-R, R\right[\quad g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$
  Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
  v) Montrer que $t \mapsto \ln(1-t)$ est développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$ et expliciter le développement.
  vi) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $\left]-1, 1\right[$ et expliciter le développement.
- La version plus générale suivante du théorème d'Abel radial a été vue en cours (et pourra être utilisée directement).
  Si $R \in \mathbb{R}_+^*$ et si $\sum a_n R^n$ est une série convergente, alors :
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \underset{t \to R^-}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$
  En revanche, le fait que la série de fonctions $\sum a_n t^n$ converge uniformément sur $[0, R]$ (point principal de la preuve) n'est pas au programme et n'est donc pas exigible.
- Attention, le cours sur les équations différentielles n'a pas encore été effectué. Le programme de première année comprend les équations du premier ordre à coefficients continues et les équations du second ordre à coefficients constants. Toutes les autres versions du théorème de Cauchy linéaire doivent être données.