Colle semaine 8 (du 28 novembre au 3 décembre 2022) - MP

Suites et séries de fonctions

Les objectifs de cette section sont les suivants :

- *définir différents modes usuels de convergence des suites et séries de fonctions ;*
- *étudier la stabilité des propriétés des fonctions par passage à la limite ;*
- *introduire la thématique de l'approximation, reliée à la notion topologique de densité, à travers deux théorèmes d'approximation uniforme susceptibles de nombreuses applications.*

En vue des applications aux équations différentielles linéaires, les fonctions considérées sont à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Dans la pratique, on se limite pour l'essentiel au cas de fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Les fonctions sont définies sur une partie A d'un espace vectoriel E de dimension finie et à valeurs dans un espace vectoriel normé F de dimension finie.

- Convergence simple d'une suite de fonctions. Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple. Pour des fonctions bornées, interprétation en termes de norme infinie.
- Si les f_n sont continues en a et si (f_n) converge uniformément vers f sur A, alors f est continue en a. En particulier, toute limite uniforme de fonctions continues sur A est continue sur A. Le théorème s'applique dans le cas où l'hypothèse de convergence uniforme est satisfaite de façon locale, en particulier sur tout segment si A est une partie de $\mathbb{R}$. En pratique, on vérifie la convergence uniforme sur des intervalles adaptés à la situation.
- Théorème de la double limite : soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F convergeant uniformément vers f sur A, et soit a un point adhérent à A (fini ou infini) ; si, pour tout n, f_n admet une limite $\ell_n \in F$ en a, alors (ℓ_n) admet une limite $\ell \in F$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$. La démonstration est hors programme.
- Intégration d'une limite uniforme sur un segment. Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, on pose :
$$\varphi_n(x) = \int_a^x f_n, \quad \varphi(x) = \int_a^x u.$$
Alors (φ_n) converge uniformément vers φ sur tout segment de I. En particulier, si (f_n) converge uniformément vers f sur le segment $[a, b]$, alors : $\displaystyle\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.
- Dérivation d'une suite de fonctions. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans F. Si (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f, et si (f'_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g, alors (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment de I, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f' = g$. En pratique, on vérifie la convergence uniforme de (f'_n) sur des intervalles adaptés à la situation.
Extension aux suites de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, sous l'hypothèse de convergence simple de $(f_n^{(j)})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$ et de convergence uniforme sur tout segment de $(f_n^{(k)})$. En pratique, on vérifie la convergence uniforme de $(f_n^{(k)})$ sur des intervalles adaptés à la situation.
- Séries de fonctions. Convergence simple, convergence uniforme. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et si la suite de ses restes converge uniformément vers 0.
- Adaptation des résultats des paragraphes précédents au cas des séries de fonctions.
- Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence absolue en tout point ainsi que la convergence uniforme.
- Exemples d'études de fonctions définies comme sommes de séries : régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale.
- Approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.
- Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbf{K}$ est limite uniforme sur S de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbf{K}$. La démonstration n'est pas exigible.

Remarques

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :

  i) Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F et $f : A \to F$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Montrer que pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$, on a :
  $$f_n(x_n) - f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  ii) Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans F et $f : A \to F$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A et que chaque fonction f_n est continue en $a \in A$. Montrer que f est continue en a.

  iii) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans F et $f : [a, b] \to F$ continue. Montrer que si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$, alors :
  $$\int_a^b f_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f.$$

  iv) Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de A dans F qui converge normalement sur A. Montrer que pour tout $x \in A$, $\sum u_n(x)$ converge absolument et que $\sum u_n$ converge uniformément sur A.

  v) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], F)$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\varphi : [a, b] \to F$ constante par morceaux telle que :
  $$\forall x \in [a, b] \quad \|f(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon.$$

- Prévoir pour chaque élève au moins un exercice de vérification des définitions et propriétés basiques (sur les suites ou sur les séries de fonctions) sans excès de technicité.