Colle semaine 7 (du 21 au 26 novembre 2022) - MP

Fonctions vectorielles

Cette section a deux objectifs :

- *étendre rapidement le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles ;*
- *fournir des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.*

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (d'intérieur non vide), à valeurs dans un espace normé de dimension finie E.

- Dérivabilité en un point. Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1. Traduction en termes de coordonnées dans une base. Dérivabilité à droite et à gauche. Caractérisation des fonctions constantes parmi les fonctions dérivables.
- Opérations sur les fonctions dérivables. Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L(f)$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1, \ldots, f_p)$, où M est multilinéaire. Cas du produit scalaire, du déterminant. Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle.
- Applications de classe $\mathcal{C}^k$. Opérations sur les applications de classe $\mathcal{C}^k$.
- Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de $\mathbb{R}$. Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles. Pour L linéaire, intégrale de $L(f)$. Inégalité triangulaire $\left\| \int_a^b f \right\| \leqslant \int_a^b \|f\|$. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.
- Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Formule de changement de variable (hypothèses de première année). Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (le cas dérivable n'est pas au programme).
- Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange (mêmes hypothèses qu'en première année). Formule de Taylor-Young à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$.

Remarques

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :
  i) Dérivabilité et dérivée de $L(f)$ où L est linéaire et f dérivable.
  ii) Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$ où B est bilinéaire et f, g dérivables en $a \in I$.
  iii) Pour L linéaire et f continue par morceaux sur $[a, b]$, on a $\int_a^b L(f) = L\big(\int_a^b f\big)$.
  iv) Inégalité de Taylor-Lagrange.
- On pourra poser des exercices sur les fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes (dans le thème du programme de la colle), ou encore adapter certains énoncés classiques de première année.