Colle semaine 6 (du 14 au 19 novembre 2022) - MP

Compléments d'algèbre linéaire et réduction

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbf{K}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{C}$.

Compléments d'algèbre linéaire et diagonalisation

- Voir le programme de colle de la semaine précédente.

Trigonalisation

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Traduction matricielle.
- Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé. Traduction matricielle.
- Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.
- Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u. Dimension d'un sous-espace caractéristique.
- Traduction matricielle de cette décomposition (dite « trigonalisation fine ») : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la forme $\lambda I_k + N$ avec N triangulaire supérieure stricte (donc nilpotente).

Remarques

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :
  i) Toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.
  ii) Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé.
  iii) Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.
  iv) Soit $u \in L(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ de multiplicité m_λ. Alors $\dim F_\lambda = m_\lambda$ (où $F_\lambda = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{id}_E)^{m_\lambda}$ est le sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ).
- D'après le bulletin officiel, « la pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme ». On se limitera donc à des matrices de taille 2 ou 3, éventuellement avec des indications.