Colle semaine 5 (du 7 au 12 novembre 2022) - MP

Compléments d'algèbre linéaire et réduction

Le but de cette section est de donner une introduction substantielle au problème de la réduction. Les approches sont de deux types, qu'il convient d'identifier : la première, de nature géométrique, repose sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; la seconde, plus algébrique, fait appel aux polynômes annulateurs.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traité sous l'hypothèse que $\mathbf{K}$ *est un sous-corps de* $\mathbb{C}$.

Compléments d'algèbre linéaire

- Algèbre. Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbf{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{F}(X,\mathbf{K})$. Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.
- Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie,
$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$
avec égalité si et seulement si la somme est directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $u_{|E_i} = u_i$ pour tout i.
- Matrices définies par blocs. Transvections par blocs (codages $L_i \leftarrow L_i + ML_j$ et $C_i \leftarrow C_i + C_iM$). Invariance du rang et du déterminant.
- Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. En dimension finie, traduction matricielle. Si deux endomorphismes u et v commutent, le noyau et l'image de v sont stables par u.
- Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.
- Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbf{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$. Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. Le polynôme minimal est unitaire. Notations $\pi_u, \mu_u, \pi_M, \mu_M$. Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbf{K}[u]$.
- Lemme de décomposition des noyaux.

Éléments propres

- Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.
Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.
Spectre d'un endomorphisme en dimension finie (la notion de valeur spectrale est hors programme).
- Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre et spectre d'une matrice carrée. Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Une matrice et sa transposée ont même spectre. Si $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{K}'$ et si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, le spectre de M dans $\mathbf{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbf{K}'$.
- Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P. Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$. Les racines de π_u dans $\mathbf{K}$ sont les valeurs propres de u. Traduction matricielle.
- La somme d'une famille finie de sous-espaces propres d'un endomorphisme est directe. Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n. Traduction matricielle.
- Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v. Traduction matricielle.

Polynôme caractéristique

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Par convention le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_A, χ_u. Coefficients du polynôme caractéristique de degrés 0 et $n-1$.
- Les valeurs propres d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sont les racines de son polynôme caractéristique. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Une matrice et sa transposée ont même polynôme caractéristique.
- Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.
- Multiplicité d'une valeur propre. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
- Théorème de Cayley-Hamilton. La démonstration n'est pas exigible. Le degré du polynôme minimal est majoré par la dimension de l'espace.

Diagonalisation

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale (c'est-à-dire, constituée de vecteurs propres). Cas des projecteurs, des symétries.
- Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E. Caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Une matrice carrée est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale. Interprétation en termes d'endomorphisme. Dans les exercices pratiques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$.
- Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes. Traduction matricielle.
- Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité. Traduction matricielle. Cas où χ_u est scindé à racines simples.
- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement s'il annule un polynôme simplement scindé, (ou encore si et seulement si son polynôme minimal est simplement scindé). Traduction matricielle.
- Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable.

La section qui suit n'est pas au programme de cette semaine de colle.

Trigonalisation

- Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Traduction matricielle.
- Expression à l'aide des valeurs propres de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable.
- Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. Caractérisation des endomorphismes nilpotents et des matrices nilpotentes par le polynôme caractéristique. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.
- Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement s'il annule un polynôme scindé, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé. Traduction matricielle.
- Sous-espaces caractéristiques d'un endomorphisme à polynôme caractéristique scindé ; E est somme directe des sous-espaces caractéristiques de u. Dimension d'un sous-espace caractéristique.
- Traduction matricielle de cette décomposition : similitude à une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la forme $\lambda I_k + N$ avec N triangulaire supérieure stricte (donc nilpotente).

Remarques

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :
  i) Soit $F_1, \dots, F_p$ des sev de dimension finie d'un $\mathbf{K}$-ev E. Montrer que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe ssi :
  $$\dim \sum_{i=1}^{p} F_i = \sum_{i=1}^{p} \dim F_i.$$
  ii) Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-ev E. Montrer que :
  $$\forall (P,Q) \in \mathbf{K}[X]^2 \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$
  iii) Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbf{K}[u]$.
  iv) Énoncer et démontrer le lemme de décomposition des noyaux pour deux polynômes.
  v) Soi E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in L(E)$ et $P \in \mathbf{K}[X]$.
  Montrer que si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est racine de P.
  vi) Les racines de π_u sont les valeurs propres de u.
  vii) La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de u (notée $m(\lambda)$).
  viii) Soit E de dimension finie et $u \in L(E)$. Montrer que :
  $$E = \bigoplus_{\lambda \in sp(u)} E_\lambda(u) \Longleftrightarrow \chi_u \text{ est scindé} \quad \text{et} \quad \forall \lambda \in sp(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m(\lambda).$$
  ix) Soit E de dimension finie et $u \in L(E)$.
  Montrer que u est diagonalisable ssi u possède un polynôme annulateur scindé simple.
- La trigonalisation n'est pas au programme de cette colle.