Colle semaine 4 (du 17 au 22 octobre 2022) - MP

Séries numériques et vectorielles

L'objectif de cette section est double :

- *consolider les acquis de première année relatifs aux séries numériques, en particulier à travers l'étude de questions de calcul asymptotique ;*
- *étendre la notion de série convergente au cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie.*

Les séries sont avant tout un outil. L'étude des séries semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

- Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Sommes partielles. Convergence, divergence. La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
- Somme et restes d'une série convergente. En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.
- Lien suite-série, séries télescopiques.
- Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.
- Technique de comparaison série-intégrale. Les étudiants doivent savoir utiliser la comparaison série-intégrale pour établir des convergences et des divergences de séries, estimer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes, notamment dans le cas d'une fonction monotone.
- Règle de d'Alembert.
- Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence, dans les cas convergent et divergent.
  La suite de référence est de signe constant à partir d'un certain rang. Cas particulier : théorème de Cesàro (pour une limite finie ou infinie).

Remarques

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :
  i) *Cours de première année.*
  Soit (u_n) une suite (positive) décroissante et qui tend vers 0. Montrer que $\sum(-1)^n u_n$ est une série convergente.
  ii) Soit E un evn de dimension finie et $\sum u_n$ une série absolument convergente à termes dans E.
  Montrer que $\sum u_n$ est une série convergente.
  iii) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs et $\ell \in [0, 1[$. Montrer que si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, alors $\sum u_n$ est une série convergente.
  iv) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.
  On suppose que $v_n \geq 0$, que $\sum v_n$ est convergente et $u_n = o(v_n)$. Montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
  v) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.
  On suppose que $v_n \geq 0$, que $\sum v_n$ est divergente et $u_n = o(v_n)$. Montrer que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.
- Les exemples de Bertrand sont hors-programme.