# Colle semaine 3 (du 10 au 15 octobre 2022) - MP

**Espaces vectoriels normés : révision du programme précédent**

- Voir le programme précédent.

**La suite de ce sommaire est au programme de cette colle.**

- Compacité (définition par les suites, *i.e.* par la propriété de Bolzano-Weierstrass). Tout compact est fermé et borné. Tout fermé relatif d'un compact (ou encore, tout fermé inclus dans un compact) est compact. Un produit (fini) de compacts est un compact de l'espace produit. Une suite à valeurs dans un compact est convergente ssi elle possède une unique valeur d'adhérence (dans $A$). L'image d'un compact $A$ par une application continue est un compact. Théorème des bornes atteintes. Théorème de Heine.
- Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs. Relation d'équivalence associée sur une partie $A$ de $E$. Les classes sont les composantes connexes par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Image continue d'une partie connexe par arcs. Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
- Evn de dimension finie. Toutes les normes sont équivalentes (démonstration hors-programme). La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base. Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Théorème de Bolzano-Weierstrass : toute suite bornée d'un evn de dimension finie possède une valeur d'adhérence. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
- Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.
- Si $E$ est de dimension finie, $L(E, F) = L_c(E, F)$.
- Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

**Remarques**

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :
  i) Soit $A$ un compact d'un evn $E$. Montrer que $A$ est borné et fermé.
  ii) Soit $A$ et $B$ deux compacts respectivement de deux evn $E$ et $F$. Montrer que $A \times B$ est un compact de $E \times F$.
  iii) Soit $A$ compact, $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$. On suppose que $\ell$ est l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)$. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.
  iv) Soit $f : A \subset E \to F$ continue. On suppose que $A$ est compact. Montrer que $f(A)$ est compact.
  v) Soit $f : A \to F$ continue. On suppose que $A$ est connexe par arcs. Montrer que $f(A)$ est connexe par arcs.
  vi) Soit $E$ un evn de dimension finie et $A$ une partie fermée bornée de $E$. En choisissant une norme adaptée sur $E$, montrer que $A$ est compact.
  vii) Soit $E$ un evn et $F$ un sev de dimension finie. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, montrer que $F$ est fermé.
- Extrait du BO : « lors de l'étude de la connexité par arcs, un dessin pertinent peut valoir preuve. »