Colle semaine 2 (du 3 au 8 octobre 2022) - MP

Espaces vectoriels normés

- Définition d'une norme, de la distance associée. Distance à une partie non vide. Inégalité triangulaire (renversée, généralisée). La fonction distance à une partie non vide est 1-lipschitzienne. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.
- Boules ouvertes, fermées, sphères. Parties convexes. Une boule est une partie convexe. Parties, fonctions, suites bornées.
- Exemples usuels d'evn. Norme 1, 2, infinie sur $\mathbf{K}^n$. Norme infinie sur les espaces de suites ou de fonctions bornées. Normes 1 et 2 sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. La propriété $\sup(kA) = k \sup A$ valable pour tout $k \geq 0$ est utilisable sans démonstration.
- Norme produit sur un produit fini d'evn.
- Suites convergentes à valeurs dans un evn. Unicité de la limite. Opérations algébriques. Toute suite convergente est bornée. Suites à valeurs dans un espace produit. Suites extraites, valeurs d'adhérence (définition et caractérisation usuelle par les ε).
- Parties ouvertes, fermées d'un evn. Caractérisation séquentielle des fermés. Toute boule ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée). Une réunion d'ouverts est un ouvert. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Résultat correspondant pour les fermés. Un produit d'ouverts (fermés) est un ouvert (fermé) de l'espace produit.
- Voisinage d'un point. Point intérieur, adhérent à une partie. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.
- Densité (diverses caractérisations).
- Voisinage, ouvert, fermé relatif.
- Comparaison de normes. Normes équivalentes.
- Limite, continuité d'une application. Caractérisation séquentielle. Caractère local. Caractérisation lorsque la fonction est à valeurs dans un espace produit. Opérations algébriques. Applications lipchitziennes. Continuité uniforme. Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
- Image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.
- Caractérisation de la continuité des applications linéaires, multilinéaires. Norme d'opérateur sur $L_c(E, F)$ (espace vectoriel des applications linéaires continues de E vers F). Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur.

La suite de ce sommaire n'est pas au programme de cette colle.

- Compacité (définition par les suites, *i.e.* par la propriété de Bolzano-Weierstrass). Tout compact est fermé borné. Tout fermé d'un compact est compact. Un produit de compacts est un compact de l'espace produit. Une suite à valeurs dans un compact est convergente ssi elle possède une unique valeur d'adhérence (dans A). L'image d'un compact par une application continue est un compact. Théorème des bornes atteintes. Théorème de Heine.
- Connexité par arcs. Composantes connexes par arcs. Les partie étoilées ou convexes sont connexes par arcs. Théorème des valeurs intermédiaires (l'image d'un cpa par une application continue est un cpa). Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.
- Evn de dimension finie. Toutes les normes sont équivalentes. Toutes les applications linéaires (ou multilinéaires) définies sur un (des) evn de dimension finie sont continues. Les compacts sont les fermés bornés. Une suite à valeurs dans un evn de dimension finie est convergente ssi elle est bornée et possède une unique valeur d'adhérence.
- Applications polynomiales. Continuité.
- Tout sev de dimension finie d'un evn est fermé.

Remarques

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :

  i) Soit A une partie non vide d'un evn E et $(x,y) \in E^2$. Montrer que $d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y)$.

  ii) Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule fermée $B_f(a,r)$ est convexe.

  iii) Montrer que $f \mapsto \|f\|_\infty$ permet de définir une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

  iv) Montrer que $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \|f\|_1$ permet de définir une norme sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

  v) Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert.

  vi) Caractérisation séquentielle de l'adhérence :

  $$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \quad x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x.$$

  Ici, $\overline{A}$ est défini comme l'ensemble des $x \in E$ vérifiant :

  $$\forall r > 0 \quad A \cap B(x,r) \neq \emptyset.$$

  vii) Soit E, F deux evn, $A \subset E$ et $f : A \to F$ continue. Soit B un fermé de F. Montrer que $f^{-1}(B)$ est un fermé relatif de A.

  viii) Soit $u \in L(E,F)$ continue en 0. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :

  $$\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$