**Colle semaine 13 (du 16 au 21 janvier 2023) - MP**

## Convergence dominée

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à $t$.*

- Théorème de convergence dominée : soit $(f_n)$ une suite de fonctions continues par morceaux de $I$ dans $\mathbf{K}$ convergeant simplement sur $I$ vers une fonction $f$ continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction $\varphi$ positive intégrable sur $I$ vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout $n$. Alors :
$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$
La démonstration est hors programme.
- Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où $J$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

## Intégration terme à terme

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à $t$.*

- Si $(f_n)$ est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur $I$, alors, dans $[0, +\infty]$,
$$\int_I \Big( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \Big) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t.$$
La démonstration est hors programme.
En particulier, l'intégrabilité de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur $I$ équivaut à :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t < +\infty.$$
- Si $(f_n)$ est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur $I$, à valeurs dans $\mathbf{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur $I$ et telle que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)| \, \mathrm{d}t < +\infty,$$
alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur $I$ et :
$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) \, \mathrm{d}t.$$
La démonstration est hors programme.

## Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

*Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à $x$ et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à $t$.*

- Soit $A$ une partie d'un espace normé de dimension finie, $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ telle que :
  - pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue ;
  - pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux ;
  - il existe une fonction $\varphi$ intégrable sur $I$ telle que, pour tout $x$ de $A$, $|f(x, \cdot)| \leqslant \varphi$.

  Alors $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $A$.
  En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de $A$, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
- Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f$ une fonction définie sur $J \times I$ à valeurs dans $\mathbf{K}$ telle que :
  - pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$ ;
  - pour tout $x \in J$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $I$ ;
  - pour tout $x \in J$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur $I$ ;
  - il existe une fonction $\varphi$ positive intégrable sur $I$ telle que, pour tout $x$ de $J$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)\right| \leqslant \varphi$.

  Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $J$ et vérifie :

  $$\forall x \in J, \qquad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

  En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de $J$, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation si $J$ est un intervalle ou sur une famille de voisinages de chaque point de $J$.
- Extension à la classe $\mathcal{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour $0 \leqslant j \leqslant k-1$. Extension à la classe $\mathcal{C}^\infty$ (intégrabilité des premières dérivées partielles et domination de toutes les suivantes sur tout segment).

## Remarque

- Pas de question de cours ; des exercices progressifs, sans technicité excessive.
- Dans le cours, les théorèmes de régularité des intégrales à paramètres ont été énoncés avec des domination sur tout segment (ou au voisinage de tout point pour la continuité sur une partie d'un evn). Dans la mesure du possible, les élèves doivent chercher à établir une domination sur des intervalles les plus grands possibles.