Colle semaine 1 (du 26 septembre au 1er octobre 2022) - MP

Intégration sur un intervalle quelconque

- Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque.
- Convergence de $\displaystyle\int_a^b f$ si f est continue par morceaux sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$ (on se ramène alors aux deux cas précédents).
  Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ si f est continue sur $]a, b]$ et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
- Si f est positive et continue par morceaux sur $[a, b[$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée. Écriture $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ en cas de divergence. Si $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\displaystyle\int_a^b g$ implique la convergence de $\displaystyle\int_a^b f$.
  Adaptation aux autres cas.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
- Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$.
- Propriété des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles. Si f est continue, positive et d'intégrale nulle, alors $f = 0$.
- On dit que f est intégrable sur I si f est continue par morceaux sur I et si $\displaystyle\int_I |f| < +\infty$. Espace $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$ des fonctions intégrables sur I.
  Si f est intégrable sur I, alors $\displaystyle\int_I f$ converge. Inégalité triangulaire.
- Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$.
  - Si $f(x) \underset{x \to b}{=} O\big(g(x)\big)$ (ou $o\big(g(x)\big)$), alors l'intégrabilité de g sur $[a, b[$ implique celle de f (on parlera aussi d'intégrabilité en b) ;
  - si $f(x) \underset{x \to b}{\sim} g(x)$, alors f et g ont même nature d'intégrabilité en b.

  Adaptation à l'intervalle $]a, b]$.
- L'étude de l'intégrabilité en un point fini se ramène à une étude en 0 par translation.
- *Intégration par parties.* Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, la convergence du crochet $\big[fg\big]_a^b$ (c'est-à-dire l'existence de limites finies pour fg en a et en b) implique que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ ont même nature et, en cas de convergence :
$$\int_a^b f'g = \big[fg\big]_a^b - \int_a^b fg'.$$
- *Changement de variable.* Étant donnés une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\to]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature et égales en cas de convergence (ou si f est de signe constant). Adaptation si φ est strictement décroissant.
- Intégration des relations de comparaisons pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence. La fonction de référence est de signe constant.

Remarque

- Voici une liste de question de cours avec démonstration pour les colleurs qui souhaitent démarrer ainsi :
  i) Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}\,\mathrm{d}t$.
  ii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
  iii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.
  iv) Théorème d'intégration par parties.
  v) Théorème de changement de variable dans le cas où le changement de variable est strictement croissant.
  vi) Intégration de la relation de négligeabilité : cas convergent.
  vii) Intégration de la relation de négligeabilité : cas divergent.
- L'utilisation de séries (et de la relation de Chasles) pour montrer une divergence d'intégrale ou une convergence dans le cas où la fonction est positive a été vue dans quelques d'exemples. En particulier, si la fonction est positive, on peut mener un calcul de $\displaystyle\int_I f$ dans $[0, +\infty]$ pour aboutir à un résultat fini, ce qui vaut preuve de convergence.
- L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. Quelques exemples d'utilisation de l'intégration par parties ou de développements limités ont été traités.
- Extrait du BO : « On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des énoncés. »